数理解析研究所講究録 1410 巻 2005 年 188-210

p-進古典群の表現と有限群の Hecke 環に関する注意

尾道大学経済情報 刈山和俊 (Kazutoshi Kariyama)

Department of Economics, Management and Information Science, Onomichi University

1 紹介

C. J. Bushnell と P. C. Kuzko は非アルキメデス的局所体 k 上の一般線形群 $G = GL_n(k)$ の既約 smooth 表現を分類した. 彼らの初期の仕事 [2] において, simple type の概念がその分類に重要な役割を演じた. その simple type は G のある開コンパクト部分群 J とある cuspidal 性をもつその既約 smooth 表現 λ の組として与えられた. その simple type の群 J はある principal hereditary 多元環 $\mathfrak{A}$ によって与えられ, またその Hecke 環 $\mathcal{H}(G, \lambda)$ は, ある自然数 e に対して, 既約な $\widetilde{A}_e$ 型の affine Weyl 群を基底にもつ (extended) affine Hecke 環に同型であることが示された. またその affine Hecke 環は e 次の対称群 S_e を基底にもつ有限 Hecke 環を含む. とりわけ, G のすべての既約 supercuspidal 表現は, その有限 Hecke 環が自明, すなわち, $e = 1$ である simple type (J, λ) の表現 λ を, G の中心 $k^\times$ を法としてコンパクトな部分群に拡張し, そしてそれを G 全体に誘導して得られる表現に同値であることが示された. これらの結果を $GL_n(k)$ 以外の古典群に拡張すること, すなわち, simple type の類似物を定義することが望まれる. 一般線形群におけるその affine Hecke 環の同型が, その拡張にある示唆を与える事を見る.

もう少し詳しく説明しよう. その simple type は principal hereditary 多元環 $\mathfrak{A}$ と k の有限次拡大体 E を生成する単純元 β から出発して構成される. J は唯一の pro-p-unipotent 部分群 J^1 を含み, その商群 J/J^1 は E の剰余類体 $\overline{E}$ 上の一般線形群 $GL_R(\overline{E})$ のある Levi 部分群 $M = M(\overline{E})$ に同型となる. $GL_R(\overline{E})$ の Weyl 群におけるこの M の正規化部分群は対称群 S_e に同型である. その M のある '単純' な既約 cuspidal 表現を取り, これを持ち上げた J の既約 smooth 表現を σ と表す. この σ ともうひとつ別の β-extension と呼ばれる J の既約 smooth 表現 κ から, 表現 λ は $\kappa \otimes \sigma$ と定義される. 他方, その多元環 $\mathfrak{A}$ から $GL_R(E)$ の parahoric 部分群 P とその唯一の pro-p-unipotent 部分群 U が得られ, $M \simeq P/U$ となる. したがって, この同型によって, M のその既約 cuspidal 表現を P/U に移し, そして P の表現に持ち上げて, いわゆ

る, $GL_R(E)$ の tamely ramified 表現を得る. それを再び σ と表せ. これから tamely ramified intertwining algebra と呼ばれる別の Hecke 環

$$\mathcal{H}(\sigma) = \mathrm{End}_{GL_{R(E)}}(\mathrm{c} - \mathrm{Ind}_P^{GL_{R(E)}}(\sigma))$$

を得る. このとき Bushnell-Kutzko [2] によって決定された Hecke 環 $\mathcal{H}(G,\lambda)$ の構造と Morris [19] 8.2 によって決定された Hecke 環 $\mathcal{H}(\sigma)$ の構造を比較して, 自然な同型

$$\mathcal{H}(G,\lambda) \simeq \mathcal{H}(\sigma)$$

を得る. この事実から, 一般の reductive 群 G に関する simple type の類似物は, そのような 2 つの Hecke 環の間の同型が存在し, それらがより単純なものとなるように定義されるべきである.

この論文において, 以下の結果を得る. Hecke 環 $\mathcal{H}(\sigma) = \mathrm{End}_G(\mathrm{Ind}_P^G(\sigma))$ の定義を, 有限体と非アルキメデス的局所体上のある非連結群 G に, 特に Chevalley 型の直交群 O_{2n+1}, O_{2n} に拡張する. ここで, 非アルキメデス的局所体の場合, 誘導作用素 Ind は c-Ind を意味する. 実際, Goldberg-Herb [11] の方法を適用して, Hecke 環 $\mathcal{H}(\sigma)$ に関する有限群の Howllet-Lehrer [16] と p-進群の Morris [19] の結果を G/G^0 が有限 abel 群となる非連結群 G に拡張する. ここで, G^0 は G の単位元を含む連結成分を表す. さらに G が古典群 Sp_{2n}, O_{2n+1}, O_{2n} の場合に, 上のような一般線形群と類似の, parahoric 部分群 P, その商群 $M = P/U$, そして, 既約 cuspidal Deligne-Lusztig 表現達のテンソル積である既約表現 σ を取り挙げ, Howllet-Lehrer [16] (4.15), Morris [19] 8.2, そして Howllet [15] の方法に従って, Hecke 環 $\mathcal{H}(\sigma) = \mathrm{End}_G(\mathrm{c} - \mathrm{Ind}_P^G(\sigma))$ の基底 $W(\sigma)$ を具体的に計算して決定する. 最後に, 以上の結果から, 非アルキメデス的局所体 k 上の古典群 G に関して, simple type の類似を定義するために用いられる G 上の filtration の候補を挙げる.

2 Hecke algebras for finite groups

2.1 Non-connected finite algebraic groups

$k = \mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体とし, G を有限体 k 上定義された reductive 代数群とする. G は必ずしも連結としない. そこで, G^0 をその単位元を含む連結成分とする. 簡単のため, G^0 を単純とする. また G^0 は必ずしも古典型とはしない.

今後, k 上の代数群 $\boldsymbol{H}$ に対して, $H = \boldsymbol{H}(k)$ を $\boldsymbol{H}$ における k-有理点からなる群を表わす. $G^0 = \boldsymbol{G}^0(k)$ は, ある Frobenius 写像 $F : \boldsymbol{G}^0 \to \boldsymbol{G}^0$ による $\boldsymbol{G}^0$ における固定点からなる群 $(\boldsymbol{G}^0)^F$ に同一視してよい. G^0 は次の 3 つの条件を満たす (cf. [6] 1.10, 1.18).

(1) G^0 は split BN-pair (B,N) をもち, $W = N/N\cap B$ は生成系 $S = \{s_i | i \in I\}$ をもつ有限 Coxeter 群である.
(2) G^0 は交換子関係を満たす.
(3) 各元 $w \in W = N/N\cap B$ に対して, もしそれが簡約表示 $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_r}$ をもつならば, N におけるその coset 代表 $\dot{w}$ を $\dot{w} = \dot{s_{i_1}}\dot{s_{i_2}}\cdots\dot{s_{i_r}}$ となるようにとれる. ここで. S における添字集合 I を, ある自然数 ℓ に対して, $I = \{1, 2, \cdots, \ell\}$ とする.

I の各部分集合 J に対して, G^0 の標準 parabolic 部分群 P_J とその Levi 分解 $P_J = L_J U_J$ が付随する. ここで, U_J は P_J の最大正規 unipotent 部分群であり, $U_J \cap L_J = 1$, そして L_J は P_J の Levi 部分群である. このとき, 連結簡約部分群 $\boldsymbol{L}_J$ と unipotent 部分群 $\boldsymbol{U}_J$ があって, $L_J = \boldsymbol{L}_J(k)$ そして $U_J = \boldsymbol{U}_J(k)$ となる. さらに $\boldsymbol{G}^0$ の parabolic 部分群 $\boldsymbol{P}_J = \boldsymbol{L}_J\boldsymbol{U}_J$ があって, $P_J = \boldsymbol{P}_J(k)$ となる. $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{L}_J$ の split component とする. このとき, $\boldsymbol{G}^0$ の極大 k-split トーラス $\boldsymbol{T}$ で, N は G^0 における $\boldsymbol{T}$ の正規化群 $N_{G^0}(\boldsymbol{T})$ であり, そして $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{T}$ を満たすものが存在する. また $\boldsymbol{L}_J$ は $\boldsymbol{G}^0$ における $\boldsymbol{A}$ の中心化群 $Z_{\boldsymbol{G}^0}(\boldsymbol{A})$ である.

σ を L_J の既約 cuspidal 表現とする. この表現を U_J 上自明にして P_J に拡張した表現を再び σ と表し, そしてこれを G^0 に誘導した表現を $\mathrm{Ind}_{P_J}^{G^0}(\sigma)$ と表す. このとき, $\mathrm{Ind}_{P_J}^{G^0}(\sigma)$ の自己準同型環

$$\mathcal{H}^0(\sigma) = \mathrm{End}_{G^0}(\mathrm{Ind}_{P_J}^{G^0}(\sigma))$$

の構造は Howllet-Lehrer [16] によって決定された. G が連結でない場合, σ を G に誘導した表現を $\mathrm{Ind}_{P_J}^{G}(\sigma)$ と表す. このとき, $\mathrm{Ind}_{P_J}^{G}(\sigma)$ の自己準同型環

$$\mathcal{H}(\sigma) = \mathrm{End}_{G}(\mathrm{Ind}_{P_J}^{G}(\sigma))$$

を p-進群に関する Goldberg-Herb [11] の方法に従って調べる.

2.2 Dimensions of $\mathcal{H}^0(\sigma)$ and $\mathcal{H}(\sigma)$

[11] と同じように, G/G^0 は abel 群と仮定する. 古典群 G は明らかにこの仮定を満たしている.

π_1, π_2 を G の 2 つの表現とし, $\mathrm{I}(\pi_1, \pi_2)$ でそれらの絡数 (interwining number) を表す. V_1, V_2 をそれぞれ π_1, π_2 の表現空間とする. このとき,

$$\mathrm{I}(\pi_1, \pi_2) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2))$$

ここで, $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ は G-準同型 $V_1 \to V_2$ からなる複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベルトル空間を表す. とくに, $V_1 = V_2$ のとき, それは $\mathrm{End}_G(V_1)$ であった.

π を G^0 の既約表現, V をその表現空間とする. π の G への誘導表現 $\mathrm{Ind}_{G^0}^{G}(\pi)$ は空間

$$\mathcal{F} = \{f : G \to \mathbb{C} | f(g_0 g) = \pi(g_0) f(g), g \in G, g_0 \in G^0\}$$

上の右移動 (right translation) に同値である. G^0 は G の正規部分群であるから, π と $g \in G$ に対して, G^0 の表現 π^g を

$$^g\pi(x) = \pi(g^{-1} x g), \ x \in G^0$$

で定義できる. さらに

$$G_\pi = \{g \in G | {}^g\pi \sim \pi\}$$

ここで, ${}^g\pi \sim \pi$ は ${}^g\pi$ と π が同値であることを表す. G_π は G の部分群である.

補題 2.2.1. (Clifford) Π を G の既約表現, π を重複度 r の Π の G^0 への制限 $\Pi|_{G^0}$ のある既約成分とせよ. このとき, 同値

$$\Pi|_{G^0} \sim r \sum_{g \in G/G_\pi} {}^g\pi$$

が存在する.

命題 2.2.2. (Gelbart-Knapp-Tadic) π を G^0 の既約表現とし, G の既約表現 Π を G^0 に制限すると π が重複度 $r > 0$ で現れるとせよ. $X = (G/G^0)^\wedge$ を *abel* 群 G/G^0 の *Pontrjagin* 双対とし, $X(\Pi) = \{\chi \in X | \Pi \otimes \chi \sim \Pi\}$ とおけ. このとき, 同型

$$\mathrm{Ind}_{G^0}^{G}(\pi) \sim r \sum_{\chi \in X/X(\Pi)} \Pi \otimes \chi$$

が存在し, 等号 $r^2 |X/X(\Pi)| = |G_\pi/G^0|$ が成り立つ, ここで, $|Y|$ は集合 Y の位数を表す.

補題 2.2.3. π_1, π_2 を G^0 の 2 つの既約表現とせよ. このとき, $\mathrm{Ind}_{G^0}^{G}(\pi_1)$ と $\mathrm{Ind}_{G^0}^{G}(\pi_2)$ がある共通の既約成分を含むための必要十分条件は, $\pi_2 \sim {}^g\pi_1$ を満たす元 $g \in G$ が存在する. このとき, $\mathrm{Ind}_{G^0}^{G}(\pi_1)$ は $\mathrm{Ind}_{G^0}^{G}(\pi_2)$ に同値である.

補題 2.2.4. π を $\mathrm{Ind}_{L,J}^{G^0}(\sigma)$ のある既約成分とせよ. もし ${}^g\pi$ がまた $\mathrm{Ind}_{L,J}^{G^0}(\sigma)$ の既約成分となるような元 $g \in G$ が存在するならば, $x_0 g \in N_G(\sigma)$ となる元 $x_0 \in G^0$ が存在する. 逆に, もし $g \in G^0 N_G(\sigma)$ ならば, ${}^g\pi$ は $\mathrm{Ind}_{L,J}^{G^0}(\sigma)$ の既約成分となり, ${}^g\pi$ の重複度は π の重複度に等しい.

補題 2.2.5. π を $\mathrm{Ind}_{L_J}^{G^0}(\sigma)$ のある既約成分とせよ．このとき，自然な全単射

$$N_{G_\pi}(\sigma)/N_{G^0}(\sigma) \simeq G_\pi/G^0$$

が存在する．

以上の結果から次を示せる．

補題 2.2.6. $\dim \mathcal{H}(\sigma) = |N_G(\sigma)/N_{G^0}(\sigma)| \dim \mathcal{H}^0(\sigma)$.

補題 2.2.7. $N_{G^0}(\sigma)$ は L_J と $\{\dot{w} | w \in W^{J,\sigma}\}$ によって生成される G^0 の部分群であり，そして $W_{G^0}(\sigma)$ は $W^{J,\sigma}$ に同型である．

証明．[6] Lemma 10.3.1 より，主張の同型を導ける．

命題 2.2.8. $\dim \mathcal{H}(\sigma) = |W_G(\sigma)|$.

証明．補題 2.2.7 と [16] (3.9) または [6] (10.1.5) より

$$\dim \mathcal{H}^0(\sigma) = |W_{G^0}(\sigma)|.$$

そこで，補題 2.2.6 より

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}(\sigma) &= |N_G(\sigma)/N_{G^0}(\sigma)| \dim \mathcal{H}^0(\sigma) \\ &= |W_G(\sigma)/W_{G^0}(\sigma)||W_{G^0}(\sigma)| \\ &= |W_G(\sigma)|. \end{aligned}$$

2.3 Knapp-Stein intertwining operators

2.1 におけるように，$J \subset I$ に対して，$P_J = L_J U_J$ を G^0 の標準 parabolic 部分群とその Levi 分解とし，そして (σ, V) を L_J の既約 cuspidal 表現とする．さらにそれを U_J 上自明にして，P_J の表現に拡張する．これを再び σ とかく．G^0 と G 上の V に値をもつ関数の集合を

$$\mathcal{F}^0(P_J, \sigma) = \{f : G^0 \to V | f(\ell u x) = \sigma(\ell) f(x),\ \ell \in L_J,\ u \in U_J,\ x \in G^0\}$$
$$\mathcal{F}(P_J, \sigma) = \{f : G \to V | f(\ell u x) = \sigma(\ell) f(x),\ \ell \in L_J,\ u \in U_J,\ x \in G\}$$

とおけ．$\mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ と $\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上のそれぞれ G^0 と G による右移動は誘導表現 $\mathrm{Ind}_{P_J}^{G^0}(\sigma)$ と $\mathrm{Ind}_{P_J}^{G}(\sigma)$ に同値である．

各元 $w \in W_{G^0}(\sigma) = N_{G^0}(\sigma)/L_J$ に対して，2.1 における代表元 $\dot{w} \in N \cap N_{G^0}(\sigma)$ をとる（補題 2.2.7 を参照）．$w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して，$\mathcal{F}^0(w^{-1} P_J w, \sigma)$ と $\mathcal{F}(w^{-1} P_J w, \sigma)$ を同様に定義できる．そこで，各元 $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して，intertwining 作用素 (intertwining operator)

$$J^0(w^{-1} P_J w : P_J : \sigma) : \mathcal{F}^0(P_J, \sigma) \to \mathcal{F}^0(w^{-1} P_J w, \sigma)$$

を次のように定義する: $f \in \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ と $x \in G^0$ に対して

$$(J^0(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma)f)(x) = |\overline{U}_J \cap \dot{w}^{-1}U_J\dot{w}|^{-1} \sum_{u \in \overline{U}_J \cap \dot{w}^{-1}U_J\dot{w}} f(ux),$$

ここで, $\overline{U}_J$ は U_J の opposite を表す, すなわち $\overline{P}_J = L_J\overline{U}_J$ が $P_J = L_JU_J$ の oposite parabolic 部分群である ([6] 2 章を参照). これは次のように積分で表示される: $x \in G^0$ に対して

$$(J^0(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma)f)(x) = \int_{\overline{U}_J \cap \dot{w}^{-1}U_J\dot{w}} f(ux)du, \qquad (2.1)$$

ここで, du は適当な測度である.

補題 2.2.7 の証明により, $N_{G^0}(L_J) \supset N_{G^0}(\sigma) \supset L_J$. そこで, [6] (10.3.2) より, L_J の表現 σ を $N_{G^0}(\sigma)$ のある射影表現 $\overline{\sigma}$ に拡張できる. また, $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して, intertwining 作用素

$$A^0_{P_J}(w) : \mathcal{F}^0(w^{-1}P_J w, \sigma) \to \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$$

を次のように定義する: $f \in \mathcal{F}^0(w^{-1}P_J w, \sigma)$ と $x \in G^0$ に対して

$$(A^0_{P_J}(w)f)(x) = \overline{\sigma}(\dot{w})f(\dot{w}^{-1}x).$$

結局, $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して, $\mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素を

$$R^0(w, \sigma) = A^0_{P_J}(w) \circ J^0(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma)$$

で定義する.

他方 [16] あるいは [6] において, $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して, $\mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素 B^0_w が, $f \in \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ と $x \in G^0$ に対して

$$(B^0_w f)(x) = |U_J|^{-1}\widetilde{\sigma}(\dot{w}) \sum_{u \in U_J} f(\dot{w}^{-1}ux)$$

で与えられる. 次の結果は直接示せる.

補題 2.3.1. $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して, $R^0(w, \sigma) = B^0_w$.

2.4 Hecke algebras for non-connected groups

$w \in W_G(\sigma) = N_G(\sigma)/L_J$ に対して, $\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素 $R(w, \sigma)$ を同様に定義しよう. $w \in W_G(\sigma)$ に対して, 代表元 $\dot{w} \in N_G(\sigma)$ を次のように選ぶ: まず, もし $w \in W_{G^0}(\sigma)$ ならば, $\dot{w}$ を上で選らんだ通りとする. そうでなければ, $\dot{w}$ は適当に選ぶ. 各 $w \in W_G(\sigma)$ に対して, L_J と $\dot{w}$ によって生成される G の部分群を $K_{J,w}$ と表せ. このとき, L_J の表現 σ を $K_{J,w}$ の

ある射影表現 $\overline{\sigma}$ に拡張でき, そして作用素 $\overline{\sigma}(\dot{w})$ を得る. もし $w \in W_{G^0}(\sigma)$ ならば, $K_{J,w} \subset N_{G^0}(\sigma)$ となる. そこで, もし $w \in W_{G^0}(\sigma)$ ならば, 上で定義した $N_{G^0}(\sigma)$ の射影表現 $\overline{\sigma}$ による $\overline{\sigma}(\dot{w})$ に等しくなるように, $K_{J,w}$ のその射影表現 $\overline{\sigma}$ を ($\mathbb{C}^\times$ の元の積により) 調整できる.

各 $w \in W_G(\sigma)$ に対して, intertwining 作用素

$$J(w^{-1}P_Jw : P_J : \sigma) : \mathcal{F}(P_J, \sigma) \to \mathcal{F}(w^{-1}P_Jw, \sigma)$$
$$A_{P_J}(w) : \mathcal{F}(w^{-1}P_Jw, \sigma) \to \mathcal{F}(P_J, \sigma)$$

を定義する: $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$ と $x \in G$ に対して

$$(J(w^{-1}P_Jw : P_J : \sigma)f)(x) = \int_{\overline{U}_J \cap \dot{w}^{-1}U_J\dot{w}} f(ux)du, \tag{2.2}$$

そして $f \in \mathcal{F}(w^{-1}P_Jw, \sigma)$ と $x \in G$ に対して

$$(A_{P_J}(w)f)(x) = \overline{\sigma}(\dot{w})f(\dot{w}^{-1}x)$$

ここで, $\overline{\sigma}(\dot{w})$ は上で定義した作用素である.

注意 1. (2.4) の定義において, $\overline{U}_J \subset G^0$ は U_J の opposite であり, そして $\dot{w}^{-1}U_J\dot{w} \subset G^0$. また du は (2.3) と類似の測度である.

$\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素 $R(w, \sigma)$ を $w \in W_G(\sigma)$ に対して

$$R(w, \sigma) = A_{P_J}(w) \circ J(w^{-1}P_Jw : P_J : \sigma)$$

と定義する.

$$G = \coprod_{i=1}^{k} G^0 x_i$$

ここで, $x_1 = 1$ とする. $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$, $1 \leq i \leq k$ に対して

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in G^0 x_i \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおけ. このとき, $f_i \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$ そして $f = \sum_{i=1}^{k} f_i$ となる.

各 $1 \leq i \leq k$ に対して, 2 つの写像

$$\lambda_i : \mathcal{F}^0(P_J, \sigma) \to \mathcal{F}(P_J, \sigma),\ \delta_i : \mathcal{F}(P_J, \sigma) \to \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$$

を次のように定義する: $f \in \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ に対して

$$(\lambda_i f)(x) = \begin{cases} f(x_0) & (x = x_0 x_i,\ x_0 \in G^0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

また $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$ に対して

$$(\delta_i f)(x_0) = f(x_0 x_i),\ x_0 \in G^0.$$

このとき, $\delta_i \circ \lambda_i = \mathrm{Id}$, また $f = \sum_{i=1}^k f_i$ に対して, $\lambda_i \circ \delta_i(f) = f_i$.

作用素 $J^0(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma)$ は (2.3) によって $w \in W_{G^0}$ 上定義された. 等号 $\dot{w}^{-1} L_J \dot{w} = L_J$ と注意 1 とより, それは $w \in W_G(\sigma)$ 上に拡張できる.

以下の一連の結果の証明は [11] に見出せる.

補題 2.4.1. $w \in W_G(\sigma)$ とせよ. このとき

$$J(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \circ J^0(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma) \circ \delta_i.$$

系 2.4.2. $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma), x \in G, x_0 \in G^0$, そして $w \in W_G(\sigma)$ とせよ. このとき

$$J(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma) f(x_0) = J^0(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma)\phi(x_0)$$

ここで, $\phi = \gamma(x) f|_{G^0}$.

上で定義した λ_i に対して

$$\Phi = \lambda_1$$

とかけ. このとき, $\phi \in \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ に対して, $f = \Phi(\phi) = \lambda_1(\phi)$ は, もし $x \in G^0$ ならば, $f(x) = \phi(x)$ であり, さもなければ, $f(x) = 0$, を満たす. また

$$W_G(\sigma) = \coprod_{i\ 1}^{\ell} w_i W_{G^0}(\sigma) \tag{2.3}$$

ここで, $w_1 = 1$ と約束する.

補題 2.4.3. 各 $1 \le i \le \ell$ に対して, 関数 $\eta_i : W_{G^0}(\sigma) \to \mathbb{C}^\times$ で, $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して

$$R(w_i, \sigma) R(w, \sigma) = \eta_i(w) R(w_i w, \sigma) \tag{2.4}$$

を満たすものが存在すると仮定せよ. $\phi \in \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ そして $f = \Phi(\phi)$ を上で定義したとおりとせよ. 今 $w_i \in W_G(\sigma)$ を固定せよ. このとき, $w \in W_G(\sigma), x_0 \in G^0$ に対して, もし $w = w_i w_0, w_0 \in W_{G^0}(\sigma)$ でないなら,

$$R(w, \sigma) f(\dot{w}_i x_0) = 0,$$

そして, もし $w = w_i w_o, w_0 \in W_{G^0}(\sigma)$ なら,

$$R(w, \sigma) f(\dot{w}_i x_0) = \eta_i(w_0) \overline{\sigma}(\dot{w}_i) J^0(w_i^{-1} P_J w_i : P_J : \sigma) R^0(w_0, \sigma) \phi(x_0).$$

以上の結果から, 次を得る.

定理 2.4.4. *(2.6)* を満たす関数 $\eta_i : W_{G^0}(\sigma) \to \mathbb{C}^\times$, $1 \le i \le \ell$ が存在すると仮定せよ. このとき, 集合 $\{R(w,\sigma) | w \in W_G(\sigma)\}$ は $\mathcal{H}(\sigma) = \mathrm{End}_G(\mathrm{Ind}_{P_J}^G(\sigma))$ のある基底を形成する.

命題 2.4.5. もし $W_G(\sigma) = W_{G^0}(\sigma)$ なら, $\mathcal{H}(\sigma)$ は多元環として $\mathcal{H}^0(\sigma)$ に同型である.

p-進古典群 $G = O_{2n+1} (n \ge 2)$ を考察する. このとき, $G^0 = SO_{2n+1}$ そして $G = SO_{2n+1} \times \{\pm 1\}$. この部分群 $\{\pm 1\}$ は G の中心である.

$J \subset I = \{1, 2, \cdots, n\}$ に付随する $G^0 = SO_{2n+1}$ の標準的 parabolic 部分群 $P_J = L_J U_J$ とその Levi 部分群 L_J の既約 cuspidal 表現 σ をとれ. このとき, $\{\pm 1\} \subset W_G(\sigma)$ は明らかである. そこで

$$W_G(\sigma) = W_{G^0}(\sigma) \cup (-1) W_{G^0}(\sigma). \tag{2.5}$$

2.2 における $\overline{\sigma}$ の定義から, 各 $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して,

$$\overline{\sigma}((\dot{-w})) = \overline{\sigma}(\dot{w})$$

としてよい. これから, $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$ に対して

$$R(-1,\sigma) f(x) = f(-x), \; x \in G.$$

補題 2.4.6. $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して

$$R(-1,\sigma) R(w,\sigma) = R(w,\sigma) R(-1,\sigma) = R(-w,\sigma).$$

この命題は, その作用素 $R(-1,\sigma)$ は多元環 $\mathcal{H}(\sigma)$ において中心的 (central) かつ対合的 (involutive) であることを示す. そこで $G = O_{2n+1}$ は定理 2.4.4 の条件を満たす. したがって, その定理 2.4.4. と命題 2.4.5 から次の結果を得る.

定理 2.4.7. $G = O_{2n+1}$ に関して, 多元環 $\mathcal{H}(\sigma)$ は $\mathcal{H}^0(\sigma) \times < R(-1,\sigma) >$ に同型である.

2.5 Howllet-Lehrer theory for non-connected groups

2.2 におけるように, G を有限体 k 上定義されたある reductive 代数群とし, G^0 をその単位元を含む連結成分とする.

それらの k-有理点からなる群 $G = G(k), G^0 = G^0(k)$ に関して, 2.3 と同じように G/G^0 は abel 群であると仮定する. 2.2 において, G^0 は BN-pair (B, N) をもつことを見た. 今後, その N を N' と書き換え, $W' = N'/B \cap N'$ と書く. さらに, この BN-pair (G^0, B, N') に対して, G はある generalized BN-pair (G, B, N) をもつと仮定せよ. すなわち, (G, B, N) は次の性質を満たす (cf. [17], [19] (3.2)):

(1) $B \cap N$ は N の正規部分群である.
(2) 商群 $W = N/B \cap N$ は正規部分群 W' を含み, そしてその部分群 Ω に対して, W は Ω と W' の半直積である.
(3) $S = \{s_a |\ a \in \Pi\}$ は Weyl 群 W' における基本鏡映 (fundamental reflection) の集合である. ここで, Π は G^0 の (relative) ルート系のある基底とする.
  (a) $n \in N$ が $w \in W$ に射影し, $n_a \in N$ が $s_a \in S$ に射影するならば,

$$nBn_a \subset Bnn_aB \cup BnB.$$

  (b) $a \in \Pi$ に対して, $n_aBn_a \neq B$.
(4) $\rho \in \Omega$ に対して, $\rho S \rho^{-1} = S$.
(5) $\rho \in \Omega - \{1\}$ に対して, $\rho B \rho^{-1} = B$.
(6) G は B と N によって生成される.

$J \subset I$ に対して, $P_J = L_JU_J$ を G^0 の標準的 parabolic 部分群とし, σ をその Levi 部分群 L_J の既約 cuspidal 表現とせよ. このとき, (連結) 有限群に関する Howllet-Lehrer 理論を拡張した Morris による p-進群に関する証明 [19, 20] は, 命題 2.2.8 から始め, Carter [6] の 2.5-2.8 そして 10.2-10.8 を参照することによって, 上の仮定を満たす有限群 G に関しても有効であることを確かめられる. すなわち, [16] Theorem 4.14 の類似を得る: 多元環 $\mathcal{H}(\sigma) = \mathrm{End}_G(\mathrm{Ind}_{P_J}^G(\sigma))$ の構造が決定される.

古典群 $G = O_{2n} (n \geq 4)$ が上の仮定を満たすことを注意する. それは anti-diagonal2n 次正方行列 $J_{2n} = (g_{ij})$, ここで, $g_{ij} = \delta_{2n+1-i,j}$ (Kronecker デルタ) $(1 \leq i, j \leq 2n)$ に対応する $V = k^{2n}$ 上の非退化 2 次形式の直交群である. このとき, $G^0 = SO_{2n}$. T を G^0 の diagonal 行列からなる極大トーラス, B を T を含む G^0 の上半三角行列からなる Borel 部分群とする. $N' = N_{G^0}(T)$ とせよ. このとき, (G^0, B, N') が 2.2 の条件を満たす BN-pair である. 行列

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&& \\ & \ddots &&&&&& \\ && 1 &&&&& \\ &&& 0 & 1 &&& \\ &&& 1 & 0 &&& \\ &&&&& 1 && \\ &&&&&& \ddots & \\ &&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

を ε と書け. このとき, $G = G^0 \cup G^0\varepsilon$. B の行列の形から, その元 ε は T および B を正規化する (cf. [9] 15.3). 実際, ε は G^0 の Dynkin graph の自己同型 (その位数は 2 である) を導く. したがって, [1] IV, §2, Exercise 8 より, G は

ある generalized BN-pair (G,B,N) をもつ．ここで，$G=G^0\cdot <\varepsilon>$，$N=N'\cdot <\varepsilon>$．

3 Hecke algebras for p-adic groups

3.1 Affine BN-pairs

k を非アルキメデス的局所体，$\mathcal{O}$ をその極大 order，そして $\mathcal{P}$ を $\mathcal{O}$ の極大イデアルとする．ϖ を $\mathcal{O}$ のある素元とする．その剰余類体 $\bar{k}=\mathcal{O}/\mathcal{P}$ はその位数 q が素数 p のある巾である有限体 $\mathbf{F}_q$ とせよ．

$\boldsymbol{G}$ を k 上定義された reductive 代数群とし，$\boldsymbol{G}^0$ を $\boldsymbol{G}$ の単位元を含む連結成分とする．$\boldsymbol{T}$ を $\boldsymbol{G}^0$ の極大 k-分裂トーラスとし，$\boldsymbol{N}$ を $\boldsymbol{T}$ の $\boldsymbol{G}^0$ における正規化部分群とする．$X_k(\boldsymbol{T})$ を $\boldsymbol{T}$ の k-有理指標のなす lattice とする．

2.2 と同様に k 上の代数群 $\boldsymbol{H}$ に対して，$H=\boldsymbol{H}(k)$ を $\boldsymbol{H}$ における k-有理点からなる群を表わす．

$G=\boldsymbol{G}(k)$ と $G^0=\boldsymbol{G}^0(k)$ は totally disconnected, locally compact 群であり，また unimodular である．

Φ を $(\boldsymbol{G}^0,\boldsymbol{T})$ に関する relative ルートからなる $X_k(\boldsymbol{T})$ の部分集合とし，Δ を Φ の単純ルートの集合とする．${}^vW$ を Φ の Weyl 群とする．V^* を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $X_k(\boldsymbol{T})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ の Φ によって生成される部分空間とする．Σ を V^* における reduced ルート系 ${}^v\Sigma$ をもつ affine ルートの集合とし，W' を Σ の affine Weyl 群とする．V を V^* の $\mathbb{R}$-dual とし，A を V 下の affine 空間とせよ．このとき，Σ の元は A 上の affine 関数であり，W' は A 上の affine 自己同型からなる群 $\mathrm{Aff}(A)$ の部分群である．

各 $a\in\Sigma$ に対して，a の gradient とよばれる ${}^v\Sigma$ の元 Da が定まる．${}^v\Sigma$ と Φ は同じ Weyl 群 ${}^vW$ をもつと仮定する．Φ_{nd} で Φ の non-divisible 元のなる集合とする．このとき，[4] で定義されるéchelonnage を通して，各 $\alpha\in\Phi$ に対して，$a\in\Sigma$ が存在して

$$\alpha=\mu_\alpha\rho(Da),\ \mu_\alpha>0$$

となる 1 対 1 対応

$$\rho:\ {}^v\Sigma\longrightarrow\Phi_{\mathrm{nd}}$$

が唯 1 通り存在する．とくに $\boldsymbol{G}^0$ が Chevalley 型ならば，$\Phi=\ {}^v\Sigma$,　そして $\Sigma=\{\alpha+k|\ \alpha\in\ {}^v\Sigma, k\in\mathbb{Z}\}$，ここで，$\alpha+k$ は A 上の affine 関数である．

[5] 5.2.11 により，affine ルート系 Σ とその基底 Π に付随して $G^0=\boldsymbol{G}^0(k)$ に以下の性質を満たす 4 つ組 (G',B,N',S) が存在する:

(1) G' は G^0 の正規部分群である．

(2) N' は $T=\boldsymbol{T}(k)$ の G' における正規化群 $N_{G'}(T)$ である．

(3) (G', B, N', S) は G' において BN-pair の公理 (cf. [1] IV, n° 1, § 2) を満たす.

$$H = B \cap N'$$

とおけ. このとき, $W' = N'/H$, $S \subset W'$ は Π の元 a に付随する基本鏡映 s_a からなる集合であり, そして (W', S) は Coxeter 系である. W' は無限群であり, affine Weyl 群とよばれる. また (G', B, N', S) は affine BN-pair とよばれる.

[19] 3.3(e) と 3.12 より, その affine BN-pair (G', B, N', S) に対して, G^0 はある generalized affine BN-pair (G^0, B, N) をもつ (cf. 2.5). そして $G^0 = G' \cdot \Gamma$ (半直積), $\Gamma/\Gamma \cap B \simeq G^0/G'$ を満たす G^0 の部分群 Γ が存在する. G^0 が半単純で Chevalley 型の場合, この事実が岩堀・松本 [18] により証明された.

$G = \boldsymbol{G}(k)$ は G^0 を正規部分群として含む. その affine BN-pair (G', B, N', S) に対して, G もある generalized affine BN-pair (G, B, N) を場合がある. その例として, 有限群の場合の 2.5 と類似で, $G = O_{2n}$ $(n \geq 4)$ がある. この事実は 2.5 の結果から [1] IV, §2, Exercise 8 を適用して直ちに示される. または, building 理論を用いた [10] §5 と §20 からも導かれる.

3.2 Parahoric subgroups

今後, G は連結であるか, または G^0 の affine BN-pair (G', B, N', S) に対して, ある generalized affine BN-pair をもつと仮定する. また (G, B, N) をその generalized affine BN-pair とする. したがって, $G \supset G^0 \supset G'$. われわれは G の parahoric 部分群を定義する.

[4] より, affine BN-pair (G', B, N') から, Bruhat-Tits building $\mathscr{B}$ が構成される. $\mathscr{B}$ 上に G^0 および G' が作用する. これは次の性質を満たす (cf. [23] 2.1):

(1) $\mathscr{B}$ は 3.1 の affine 空間 A を含む.
(2) $\mathscr{B}$ は G'-集合であり, $\mathscr{B} = \cup_{g \in G'} gA$.
(3) N' は A を安定化し, それが準同型 $\nu : N' \to \mathrm{Aff}(A)$ を導く, そして $W' = \nu(N')$.
(4) $H = B \cap N' = \mathrm{Ker}(\nu)$.
(5) A の面分 (facet) は $\mathscr{B}$ の面分であり, そして $\mathscr{B}$ の面分は G' の元によって A の面分に移される.

$\boldsymbol{G}(k)$ が $\mathscr{B}$ 上 simplicial complex の自己同型として作用すると仮定せよ. $\mathscr{B}$

の面分 F の G'-中心化群

$$P_F = \{g \in G' |\ g.x = x,\ x \in F\}$$

を G' の parahoric 部分群とよぶ．P が G の parahoric 部分群とは，$P = P_F$ を満たす $\mathscr{B}$ のある面分 F が存在するときとする． すなわち，$P = P_F$ は G' の parahoric 部分群に他ならない．

affine ルート系 Σ の基底 Π に，A の alcove C_0 が対応して

$$\Pi = \{a \in \Sigma |\ a|_{C_0} \equiv 0\}$$

となる．ここで，$a|_{C_0}$ は affine 関数 a を C_0 に制限したものを表す．

$J \subset \Pi$ とせよ．J に対して，C_0 の閉包 $\overline{C}_0$ の面分 F が対応する．

$$\Sigma_F = \{a \in \Sigma |\ a|_F \equiv 0\}$$

さらに 3.1 の Σ と Φ の関連から，ルート系

$$\Phi_F = \{\alpha \in \Phi |\ \exists a \in \Sigma_F \text{ s.t. } \alpha = \mu_\alpha \rho(Da)\}$$

を得る．今後

$$\Sigma_J = \Sigma_F,\ \Phi_J = \Phi_F$$

と書く．このとき，Φ_J は必ずしも Φ において closed とは限らない．

W_J を基本鏡映 s_a, $a \in J$ によって生成される W' の部分群とせよ．このとき，W_J は Φ_J の Weyl 群である．さらに

$$P_J = P_F$$

と書け．これを G の標準的 parahoric 部分群とよぶ．この P_J に付随して，G^0 のコンパクト開 pro-p-unipotent 部分群 U_J と連結 reductive $\mathbb{F}_q$-代数群 $\mathbf{M}_J$ が存在する．$M_J = \mathbf{M}_J(\mathbb{F}_q)$ と書くとき，exact 列

$$1 \to U_J \to P_J \to M_J \to 1 \tag{3.1}$$

を得る．

各 $\alpha \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ に対して，U_α を G^0 における対応するルート部分群とする．$J \subset \Pi$ とし，$F \subset A$ を J に対応する面分とせよ．このとき，$a = a(\alpha, J)$ で，$a|_F \geq 0$ かつ $\rho(Da) = \alpha$ となる (選択 $\Pi \subset \Sigma$ が定める順序に関して) 最小の affine ルートを表す．このとき，各 $a \in \Sigma$ に対して，$\alpha = \rho(Da)$ となる $\alpha \in \Phi_{\mathrm{nd}}$ が定まり，そして $U_\alpha = \boldsymbol{U}_\alpha(k)$ のコンパクト開部分群 U_a が定まる．

Φ^+ を基底 Δ に関する Φ の正ルートの集合とする．このとき，G' の部分群を以下のように定義する：

$$U_J^+ = U_F^+ = < U_{a(\alpha,J)} | \ \alpha \in \Phi_{\mathrm{nd}}^+ = \Phi_{\mathrm{nd}} \cap \Phi^+ >,$$
$$U_J^- = U_F^- = < U_{a(\alpha,J)} | \ \alpha \in \Phi_{\mathrm{nd}}^- = \Phi_{\mathrm{nd}} \cap (-\Phi^+) >,$$
$$N_J' = \{n \in N' | \ n.x = x, \ x \in F\}.$$

${}^c\Phi_J$ で Φ における Φ_J の閉包を表す. G^0 の部分群

$$\mathfrak{M} = < T, U_\alpha | \ \alpha \in {}^c\Phi_J >$$

を定義する. このとき, $\mathfrak{M}$ は T を含む G^0 の連結 reductive k-代数部分群であり, ${}^c\Phi_J$ が $(\mathfrak{M}, T)$ のルート系である. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(k)$ の部分群

$$\mathfrak{M}' = < H, U_\alpha | \ \alpha \in {}^c\Phi_J >,$$
$$\mathscr{M}_J = \mathfrak{M}' \cap P_J, \ \mathscr{U}_J = \mathfrak{M}' \cap U_J$$

を定義する. このとき, [20] 1.10 から, exact 列

$$1 \to \mathscr{U}_J \to \mathscr{M}_J \to M_J \to 1 \tag{3.2}$$

を得る.

3.3 Generalized affine Hecke algebras

G および (G, B, N) を前の 3.2 の初めに仮定した通りとする. $J \subset \Pi$ とし, P_J, M_J そして $\mathscr{M}_J$ を 3.2 の通りとせよ. (σ, V) を連結 reductive $\mathbb{F}_q$-代数群の $\mathbb{F}_q$-有理点の群 $M_J = \mathbf{M}_J(\mathbb{F}_q)$ の既約 cuspidal 表現とせよ. exact 列 (3.1) から, σ を P_J の表現に持ち上げることができる. これもまた σ と表す. この表現 σ の G への compact 誘導表現を $c-\mathrm{Ind}_{P_J}^G(\sigma)$ と書く. このとき, その自己同型群を有限群の場合と同じように

$$\mathcal{H}(\sigma) = \mathrm{End}_G(c - \mathrm{Ind}_{P_J}^G(\sigma))$$

と書く. われわれはこの多元環の基底を与え, それらの間の乗法関係を計算し, そしてそれがある generalized affine Hecke algebra であることを 2 章の有限群と同じ方法で見る. M_J の表現 σ は exact 列 (3.2) から $\mathscr{M}_J$ の表現, σ と表す, に持ち上げられる. G における generalized affine BN-pair (G, B, N) から, $W = N/H = \Omega \cdot W'$ (半直積) を得る. W の部分群

$$S_J = \{w \in W | \ w(J) = J\}$$

を定義する. そして, N_J を射影 $N \to W = N/H$ のもと, 3.2 で定義した $W_J (\subset W')$ の逆像とせよ. このとき, [19] 4.16 より, $N_J = N \cap \mathscr{M}_J$ そしてこれは N における $\mathscr{M}_J$ の正規化群 $N_N(\mathscr{M}_J)$ において正規である. したがって, [6] 9.2.1 と [16] (2.2) とから,

$$N_N(\mathscr{M}_J)/N_J \simeq N_W(W_J)/W_J \simeq S_J.$$

$\mathscr{M}_J$ の表現 σ に対して

$$W_G(\sigma) = \{w \in S_J | \ ^w\sigma \sim \sigma\}$$

と定義せよ. ここで, $^w\sigma$ を有限群の 2.2 の通りに定義する.

$W = \Omega \cdot W'$ の元 w の長さ $\ell(w)$ を Coxeter 系 (W', S) の長さから定義できる. $w \in W$ に対して, $\dot{w} = n_w$ を N におけるある代表元を表す. [19] 5.2 より, 2.1 の有限群と同じように, もし $\ell(w_1 w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$ ならば, $n_{w_1 w_2} = n_{w_1} n_{w_2}$ となるように n_w をとることができる.

G 上 $\mathbb{C}$-ベクトル空間 V に値をもちコンパクトな台 (support) をもつ関数の集合を $C_c(G, V)$ と表す. このとき

$$\mathcal{F}(P_J, \sigma) = \{f \in C_c(G, V) | \ f(px) = \sigma(p) f(x), p \in P_J, x \in G\}$$

とおけ. この $\mathbb{C}$-ベクトル空間 $\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上の G による右移動 (right translation) は compact 誘導表現 $c - \mathrm{Ind}_{P_J}^G(\sigma)$ に同値である. 各 $w \in W_G(\sigma)$ に対して, [11] に従って, $\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素 $R(w, \sigma)$ を定義する.

そのために準備をする. $w \in W$ とせよ. 3.2 の記号を用いる. [19] 5.6 と [20] Corrigendra とより, U_{wJ} の部分群

$$U_{w,J}^{+} =< H^*, U_a | \ a \notin \Sigma_{wJ}, a > 0, w^{-1}a > 0 >,$$
$$U_{w,J}^{-} =< U_a | \ a \notin \Sigma_{wJ}, a > 0, w^{-1}a < 0 >$$

を定義する. ここで, 定理 3.2.1 のように $H^* = H \cap U_{wJ}$. このとき, [19] 5.7 と定理 3.2.1 より, $U_{wJ} =< U_{w,J}^{-}, U_{w,J}^{+} >$ そして

$$U_{w,J}^{+} \backslash U_{wJ} \simeq U_{w,J}^{+} \cap U_{w,J}^{-} \backslash U_{w,J}^{-}.$$

さて, 各 $w \in W_G(\sigma)$ に対して, intertwining 作用素

$$J(w^{-1}Pw : P_J : \sigma) : \mathcal{F}(P_J, \sigma) \to \mathcal{F}(w^{-1}P_J w, \sigma)$$

を次のように定義する: $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$ に対して,

$$(J(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma) f)(x) = \frac{1}{|U_{w,J}^{-}|} \int_{U_{w,J}^{-}} f(ux) du, \ x \in G$$

ここで, $U_{w,J}^{-} = U_{w,J}^{+} \backslash U_{wJ}$ とする. これは有限集合であり, $|U_{w,J}^{-}|$ はその位数を表す. さらに, du は適当な測度である.

今 $N_G(\sigma) =< \mathscr{M}_J \cup \{\dot{w} | \ w \in W_G(\sigma)\} >$ とおけ. このとき

$$N_G(\sigma) / \mathscr{M}_J \simeq W_G(\sigma)$$

だから, $\mathscr{M}_J$ の表現 σ を $N_G(\sigma)$ の射影表現 $\overline{\sigma}$ に拡張できる:

$$(^w\sigma)(x) = \overline{\sigma}(\dot{w})^{-1} \sigma(x) \overline{\sigma}(\dot{w}), \ x \in N_G(\sigma).$$

そこで, $w \in W_G(\sigma)$ に対して, intertwining 作用素

$$A_{P_J}(\sigma) : \mathcal{F}(\dot{w}^{-1}P_J w, \sigma) \to \mathcal{F}(P_J, \sigma)$$

を次のように定義する: $f \in \mathcal{F}(w^{-1}P_J w, \sigma)$ に対して

$$(A_{P_J}(\sigma)f)(x) = \overline{\sigma}(\dot{w})f(\dot{w}^{-1}x), \ x \in G.$$

結局, $w \in W_G(\sigma)$ に対して, $\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素を

$$R(w, \sigma) = A_{P_J}(\sigma) \circ J(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma)$$

と定義する.

今 G は連結と仮定せよ. このとき, [19] 5.4 において, $w \in W_G(\sigma)$ に対して, $\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素 B_w が定義されている. これは [19] 5.9 より

$$R(w, \sigma) = B_w, \ w \in W_G(\sigma)$$

と一致する. したがって, [19] 5.4 と 5.5 から次の命題を得る.

命題 3.3.1. *$R(w, \sigma), w \in W_G(\sigma)$ は多元環 $\mathcal{H}(\sigma)$ のある基底を形成する.*

$W = N/H$ の部分群 $W_G(\sigma)$ の構造が [19] 7.3 により次のように決定される.

命題 3.3.2. *G は連結とせよ. このとき, $W_G(\sigma)$ はある affine Coxeter 群に同型なある正規部分群 $R(\sigma)$ を含む. $C(\sigma)$ をその complement とすると, $W_G(\sigma) = R(\sigma) \cdot C(\sigma)$ (半直積) となる. さらに, 正ルートの集合 Σ^+ から $R(\sigma)$ に付随する affine ルート系の単純ルートの集合を自然に得る.*

[19] §6, §7 において, 分解 $W_G(\sigma) = R(\sigma) \cdot C(\sigma)$ に従って intertwining 作用素 $R(w, \sigma), w \in W_G(\sigma)$ の間の乗法関係が計算される. さらに [19] 7.7 と 7.8 において, それらを正規化して作用素 $T_w, w \in W_G(\sigma)$ が得られる. [19] 6.2 と 7.11 より, また $C(\sigma) \times C(\sigma)$ 上のみ非自明なある 2-cocycle

$$\mu : W_G(\sigma) \times W_G(\sigma) \to \mathbb{C}^\times$$

が得られる.

定理 3.3.3. *G は連結とせよ. 多元環 $\mathcal{H}(\sigma)$ は次の関係の下, 元 $T_w, w \in W_G(\sigma)$ によって生成される. $v = v[a, J]$ をある単純ルート $a \in \Pi$ に対応する $R(\sigma)$ の鏡映, そして $w \in W_G(\sigma), t \in C(\sigma)$ とせよ. このとき*

(1) $T_w T_t = \mu(w, t) T_{wt}$
(2) $T_t T_w = \mu(t, w) T_{tw}$

(3)

$$T_vT_w = \begin{cases} T_{vw}, & w^{-1}a > 0 \\ p_aT_{vw} + (p_a - 1)T_w, & w^{-1}a < 0 \end{cases}$$

(4)

$$T_wT_v = \begin{cases} T_{wv}, & wa > 0 \\ p_aT_{wv} + (p_a - 1)T_w, & wa < 0 \end{cases}$$

ここで, p_a は k の剰余標数 p のある非負整数巾, そして T_w は $P_J\dot{w}P_J$ を台にもつ.

以上の結果 3.3.1 から 3.3.3 は [19, 20] において示された. しかしながら, それらの証明は $G = G(k)$ が generalized affine BN-pair をもつ場合にもそのまま有効であることがわかる.

定理 3.3.4. 上のような generalized affine BN-pair をもつ G に関して, 命題 *3.3.1, 3.3.2,* そして定理 *3.3.3* が成立する.

3.1 の最後の注意から, とくに $G = O_{2n}$ $(n \geq 4)$ に関して, 定理 3.3.3 が成立している.

最後に $G = O_{2n+1}$ $(n \geq 2)$ を考察する. $J \subset \Pi$ とし, (σ, V) を $M_J = \mathbf{M}_J(\mathbb{F}_q)$ の既約 cuspidal 表現とせよ. $(\sigma^\vee, V^\vee)$ を (σ, V) の contragradient 表現とせよ. このとき, $\mathcal{H}(\sigma)$ は Hecke 環 $\mathcal{H}(G, \sigma^\vee)$ に同型であり (cf. [2] §4), さらにこれは

$$\{f \in C_c^\infty(G, \mathrm{End}(V)) |\ f(p_1xp_2) = \sigma(p_1)f(x)\sigma(p_2),\ x \in G,\ p_1, p_2 \in P_J\}$$

に同型である. ここで, $C_c^\infty(G, \mathrm{End}(V))$ は locally constant かつ compactly supported 関数 $f : G \to \mathrm{End}(V)$ からなる $\mathbb{C}$-ベクトル空間を表す. したがって, $\mathcal{H}(\sigma)$ をその空間と同一視してよい. G^0 に関して, $\mathcal{H}(\sigma)$ と区別して,

$$\mathcal{H}^0(\sigma) = \mathrm{End}_{G^0}(c - \mathrm{Ind}_{P_J}^{G^0}(\sigma))$$

と書く. [19] 4.9 より, Mackey intertwining 定理

$$\mathcal{H}(\sigma) \simeq \bigoplus_{x \in P_J \backslash G / P_J} \mathrm{Hom}_{P_J \cap xP_Jx^{-1}}({}^x\sigma, \sigma)$$

を得る. $G = G^0 \times \{\pm 1\}$ また $P_J \subset G^0$ だから

$$P_J \backslash G / P_J = (P_J \backslash G^0 / P_J) \cup (P_J \backslash \pm P_J / P_J).$$

また $W_G(\sigma) \supset \{\pm 1\}$ だから

$$W_G(\sigma) = W_{G^0}(\sigma) \times \{\pm 1\}.$$

もし関数 $f \in C_c^\infty(G, \mathrm{End}(V))$ がある $x \in G^0$ に対して, $P_J x P_J$ を台にもつならば, $f|_{G^0}$ は $\mathcal{H}^0(\sigma)$ に属し $P_J x P_J$ を台にもつ. そこで, [19] 4.14 より, $x \in W_{G^0}(\sigma)$. intertwining 作用素 $R(\pm w, \sigma)$, $w \in W_{G^0}(\sigma)$ を上と同じように定義できる. 有限体の場合と同じように,

$$R(-w,\sigma) = R(-1,\sigma)R(w,\sigma), w \in W_{G^0}(\sigma)$$

そして $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$ に対して,

$$R(-1,\sigma)f(x) = f(-x), x \in G$$

を得る. $R(-1,\sigma)$ は可逆だから, $R(-w;\sigma) \neq 0$. $-w$ の代表元 $-n$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{P_J \cap {}^{(-n)}P_J}({}^{(-n)}\sigma, \sigma) = \mathrm{Hom}_{P_J \cap {}^{n}P_J}({}^{n}\sigma, \sigma) \simeq \mathbb{C}$$

だから, $\mathrm{Hom}_{P_J \cap {}^{(-n)}P_J}({}^{(-n)}\sigma, \sigma) = \mathbb{C}R(-w,\sigma)$. したがって, $R(\pm w, \sigma), w \in W_{G^0}(\sigma)$ が $\mathcal{H}(\sigma)$ を生成する.

定理 3.3.5. $G = O_{2n+1}$ に関して, $R(w,\sigma), w \in W_G(\sigma)$ は多元環 $\mathcal{H}(\sigma)$ のある基底を与える.

証明 . $R(w,\sigma), w \in W_G(\sigma)$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立であることを示せばよい. 有限群の場合の定理 2.4.4 の主張および証明は p-進群に関しても有効である. したがって, この定理の主張を示せる.

系 3.3.6. $G = O_{2n+1}$ に関して, $\mathcal{H}(\sigma) \simeq \mathcal{H}^0(\sigma) \times < R(-1,\sigma) >$.

証明 . この主張は有限群の場合の定理 2.4.7 と全く同じである. その証明は p-進群に関してまた有効である.

4 Examples

4.1 Preliminary

今後, G を非アルキメデス的局所体 k 上の Chevalley 型の単純古典群とし, $G = \boldsymbol{G}(k)$ をその k-有理点の群とする. また k の剰余標数 p は 2 でないと仮定する. このとき, G はある正の整数 n に対して

$$\boldsymbol{Sp}_{2n}(k)\ (n \geq 2),\ \boldsymbol{O}_{2n+1}(k)\ (n \geq 2),\ \boldsymbol{O}_{2n}(k)\ (n \geq 4)$$

のいずれかである. これらを簡単に Sp_{2n}, O_{2n+1}, O_{2n} とおのおの書く.

G の affine ルート系 Σ は次の形の基底 Π をもつ:

$$\Pi = \{a_0 = 1 - \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\}.$$

ここで, $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ は G^0 のルート系 Φ の基底であり, α_0 は Φ における最大ルートである. G の階数 n が, 正の整数 m, λ に対して

$$n = m\lambda$$

を満たすと仮定する. このとき, Π の部分集合 J に関して、以下の 4 つの型のものを考察する.

(1) $J = \Pi - \{a_0, \alpha_\lambda, \alpha_{2\lambda}, \cdots, \alpha_{(m-1)\lambda}, \alpha_{m\lambda} = \alpha_n\}$,

(2) $J = \Pi - \{a_0, \alpha_\lambda, \alpha_{2\lambda}, \cdots, \alpha_{(m-1)\lambda}\}$,

(2′) $J = \Pi - \{\alpha_\lambda, \alpha_{2\lambda}, \cdots, \alpha_{(m-1)\lambda}, \alpha_n\}$,

(3) $J = \Pi - \{\alpha_\lambda, \alpha_{2\lambda}, \cdots, \alpha_{(m-1)\lambda}\}$.

3 章の結果, このような $J \subset \Pi$ から, k の剰余類体 $\mathbb{F}_q$ 上の連結 reductive 代数群 $M_J = U_J \backslash P_J$ が決まる. M_J のある既約 cuspidal 表現 σ' をとる. 3.3 において, G の generalized BN-pair の Weyl 群 W の部分群

$$S_J = \{w \in W |\ w(J) = J\},$$
$$W(\sigma') = \{w \in S_J |\ {}^w\sigma' \sim \sigma'\}$$

を定義した. 定理 3.3.3, 3.3.4 における鏡映 $v[a, J]$ と $W(\sigma')$ の部分群 $R(\sigma')$ は, [19] 2.4 (cf. [15]) によって, 以下のように定義される: ある $w \in W$ に対して, $w(J \cup \{a\}) \subset \Pi$ を満たすような $a \in \Sigma$ に対して,

$$v[a, J] = (w_0)_{J\cup\{a\}}(w_0)_J$$

とおけ. ここで, 例えば, $J \cup \{a\}$ の各元に対応する基本鏡映によって生成される W (実際, W') の部分群を $W_{J\cup\{a\}}$ と表せ. これは仮定から Coxeter 群であるから, 唯一の長さ最大の元をもつ. それを $(w_0)_{J\cup\{a\}}$ と表す.

$v[a, J] \in S_J$ となるための必要十分条件は $v[a, J]$ が $v[a, J]^2 = 1$ を満たすことである. このような元 $[a, J]$ によって生成される S_J の正規部分群を R_J と表す. このとき, S_J の部分群 C_J があって, $S_J = C_J \cdot R_J$ (半直積) となる (cf. [15] Lemma 2).

(1) $v[a, J]^2 = 1$, (2) 定理 3.3.3, 3.3.4 におけるパラメータ p_a に対して, $p_a \neq 1$, そして (3) $v[a, J] \in W(\sigma')$ を満たす $v[a, J]$ によって生成される $W(\sigma')$ の正規部分群を $R(\sigma')$ と表す. このとき, 定理 3.3.3, 3.3.4 より,

$$W(\sigma') = C(\sigma') \cdot R(\sigma') \text{ (半直積)}$$

を満たす $W(\sigma')$ の部分群 $C(\sigma')$ が存在する (cf. [19] Proposition 7.7).

古典群 G における上のような $J \subset \Pi$ に対して, [2] (5.5.10) あるいは [19] 8.1 の一般線形群と類似の既約 cuspidal 表現 σ' を与え, そして [19] 8.1, 8.2 および [15] の方法に従って, 群 $W(\sigma')$ を決定する (cf. [16] (4.15) または [14] Ch. 1, Theorem 5). 紙数の関係で、ここでは Sp_{2n} における群 $W(\sigma')$ の構造のみを以下に示す. 他の古典群に関しても同様の結果を得る.

C_n 型 $(n \geq 2)$

(I) $M_J = (GL_\lambda(\mathbb{F}_q))^m$, $\sigma' = \sigma \otimes \cdots \otimes \sigma$,

$$W(\sigma') = \begin{cases} W'(\widetilde{C}_m) & (\sigma^* \sim \sigma) \\ W(\widetilde{A}_{m-1}) & (\sigma^* \not\sim \sigma) \end{cases}$$

(II) $M_J = (GL_\lambda(\mathbb{F}_q))^{m-1} \times Sp_{2\lambda}(\mathbb{F}_q)$, $\sigma' = \sigma \otimes \cdots \otimes \sigma \otimes \sigma_C^*$,

$$W(\sigma') = \begin{cases} \mathbb{Z} \times W'(\widetilde{C}_{m-1}) & (\sigma^* \sim \sigma) \\ \mathbb{Z} \times W(\widetilde{A}_{m-2}) & (\sigma^* \not\sim \sigma) \end{cases}$$

(III) $M_J = Sp_{2\lambda}(\mathbb{F}_q) \times (GL_\lambda(\mathbb{F}_q))^{m-2} \times Sp_{2\lambda}(\mathbb{F}_q)$, $\sigma' = \sigma_C^* \otimes \sigma \otimes \cdots \otimes \sigma \otimes \sigma_C^*$,

$$W(\sigma') = \begin{cases} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \times W'(\widetilde{C}_{m-2}) & (\sigma^* \sim \sigma) \\ (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \times W(\widetilde{A}_{m-3}) & (\sigma^* \not\sim \sigma) \end{cases}$$

ここで, $W(\widetilde{A}_m)$ は $\widetilde{A}_m$ 型の generalized affine Weyl 群, また $W'(\widetilde{C}_m)$ は $\widetilde{C}_m$ 型の affine Weyl 群を表す.

5 Filtrations on classical groups

k をその剰余標数が 2 でない非アルキメデス的局所体とし, $x \to \overline{x}$ を k 上の Galois involution を表す ($\overline{x} = x$, $x \in k$ も許す). $\mathcal{O}_k$ を k の極大多元環, $\mathcal{P}_k$ をその極大イデアルとし, $\overline{k} = \mathcal{O}_k/\mathcal{P}_k$ をその剰余類体とする. V を有限次元 k-ベクトル空間とし, $h : V \times V \to k$ をある非退化 ± 1-hermitian form とする. このとき

$$G = \{g \in GL_k(V) |\ h(gv, gw) = h(v, w),\ v, w \in V\}$$

とし, そして $G^0 = \{g \in G |\ \det(g) = 1\}$ とする.

4 章の結果から, 古典群 G において, 対応する tamely ramified intertwining algebra $\mathcal{H}(\sigma')$ またはその基底の $W(\sigma')$ がより単純になる, 一般線形群と類似の, $J \subset \Pi$ と M_J の既約 cuspidal 表現 σ' は 4.5 の表における (I), (II), そして (II$'$) である. さらに, 一般線形群の [2] 7 章の議論, とくに Theorema 7.2.17 から, simple type の類似を定義するための G 上の filtration の候補として, (I) または '(II) かつ $m = 1$' を導くものを挙げることができる. そのような G 上の filtration を与える V の $\mathcal{O}_k$-lattice sequence の条件を記述しよう.

Λ が V の $\mathcal{O}_k$-lattice sequence とは, 次の条件を満たす関数 $\Lambda : \mathbb{Z} \to \{V$ の $\mathcal{O}_k$-lattice$\}$ のことである:

(1) $n \geq m$ ならば, $\Lambda(n) \subset \Lambda(m)$,

(2) $\Lambda(n+e) = \mathscr{P}_k\Lambda(n),\ n \in \mathbb{Z}$ を満たす自然数 e が存在する.

$\mathscr{O}_k$-lattice sequence から $A = \mathrm{End}_k(V)$ の filtration

$$\mathfrak{a}_n(\Lambda) = \{x \in A |\ x\Lambda(m) \subset \Lambda(m+n),\ m \in \mathbb{Z}\}\ (n \in \mathbb{Z})$$

を得る. とくに, $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$ は A の hereditary $\mathscr{O}_k$-多元環であり, $\mathfrak{a}_1(\Lambda)$ はその Jacobson 根基である. $\mathscr{O}_k$-lattice sequence Λ に対して, $\boldsymbol{L}_\Lambda = \{\Lambda(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ とせよ. すなわち, $\boldsymbol{L}_\Lambda$ は $\Lambda(k),\ k \in \mathbb{Z}$ の内の相異なる $\mathscr{O}_k$-lattice からなる lattice chain とする. Λ に対するのと同じように, $\mathfrak{a}_n(\boldsymbol{L}_\Lambda)$ を定義せよ. このとき,

$$\mathfrak{a}_n(\Lambda) = \mathfrak{a}_n(\boldsymbol{L}_\Lambda)\ (n = 0, 1)$$

が成り立つ.

V の $\mathscr{O}_k$-lattice sequence が *self-dual* とは,

$$\Lambda(n)^{\#} = \Lambda(d-n),\ n \in \mathbb{Z}$$

を満たす整数 d を見出せることとする (cf. [24]). V の $\mathscr{O}_k$-lattice sequence Λ が self-dual とせよ. このとき, もし $L \in \boldsymbol{L}_\Lambda$ ならば, $L^{\#} \in \boldsymbol{L}_\Lambda$ となる. そこで, [21] Proposition 1.7 より, $\boldsymbol{L}_\Lambda$ の中に, ある自然数 r が存在して,

$$L_{r-1}^{\#} \supsetneq \cdots \supsetneq L_0^{\#} \supset L_0 \supsetneq \cdots \supsetneq L_{r-1} \supset \varpi L_{r-1}^{\#}$$

これから [21] 1.12 (1) の同型から $M_J = U_J \backslash P_J$ を決定できる. そして, その $J \subset \Pi$ が (I) を満たすための必要十分条件は

$$r = m+1,\ L_m = \varpi L_m^{\#}, L_0^{\#} = L_0,\ \dim_{\overline{k}}(L_{i-1}/L_i) = \lambda,\ 1 \le i \le m,$$

であり, また $J \subset \Pi$ が '(II) かつ $m = 1$' を満たすための必要十分条件は

$$r = m = 1, L_0^{\#} \supsetneq L_0 = \varpi L_0^{\#}$$

であることがわかる. このとき, いづれの場合も, $\mathfrak{a}_0(\Lambda) = \mathfrak{a}_0(\boldsymbol{L}_\Lambda)$ は principal である.

最後に, (I) と '(II) かつ $m = 1$' に対する Hecke 環 $\mathcal{H}(\sigma')$ の構造を決定すること, すなわち, 定理 3.3.3, 3.3.4 において, 分解 $W(\sigma') = C(\sigma') \cdot R(\sigma')$ とパラメータ p_a の値を決定することが今後の課題である.

参考文献

[1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie IV, V, VI, Paris, Hermann 1968.

[2] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, The admissible dual of GL(N) via compact open subgroups, Ann. Math. Stud. **129**, Princeton Univ. Press, 1993.

[3] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, *Semisimple types in GL_n,* Compositio Math. **119**, 53-97 (1999).

[4] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées,* Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **41**, 5-251 (1972).

[5] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée* Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **60**, 5-184 (1984).

[6] R. W. Carter, Finite groups of Lie type, Wiley-Interscience, 1985.

[7] C. W. Curtis and I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, Wiley-Interscience, 1988.

[8] P. Deligne and G. Lusztig, *Representaions of reductive groups over finite fields,* Ann. of Math. (2) **103**, 103-161 (1976).

[9] F. Digne and J. Michel, Representations of finite groups of Lie type, London Math. Soc. Student Texts **21**, Cambridge University Press, 1991.

[10] P. Garret, Buildings and classical groups, Chapman and Hall, 1997.

[11] D. Goldberg and R. Herb, *Some results on the admissible representations of non-connected reductive p-adic groups,* Ann. Scient. Èc. Norm. Sup., 4 série, t. **30**, 97-146 (1997).

[12] S. S. Gelbart and A. Knapp, *L-indistinguishuishability and R groups for the special linear group,* Adv. in Math., Vol. **43**, 101-121 (1982).

[13] R. Howe, *Affine-like Hecke algebras and p-adic representation theory,* In : I. Cherednik, Ya. Markov, R. Howe and G. Lusztig, Iwahori-Hecke Algebras and their Representation Theory, Lectures given at the C.I.M.E. Italy 1999, Lecture Notes in Math., **1804**, 27-69, Springer-Verlag, Berlin and New York, 2002.

[14] R. Howe and A. Moy, Harish-Chandra homomorphisms for p-adic groups, CBMS Regional Conf. Series in Math. **59** (Amer. Math. Soc., Providence RI, 1985).

[15] R. B. Howllet, *Normalizers of parabolic subgroups of reflection groups,* J. London Math. Soc. **21**, 62-80 (1980).

[16] R. B. Howllet and G. I. Lehrer, *Induced cuspidal representations and generalized Hecke rings,* Invent. Math. **58**, 37-64 (1980).

[17] N. Iwahori, *Generalized Tits system (Bruhat decomposition) on p-adic semisimple groups,* Proc. Symposia Pure Math. **IX**, 71-63 (A.M.S, Providence, 1966).

[18] N. Iwahori and H. Matsumoto, *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of the p-adic Chevalley groups,* Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **25**, 5-48 (1965).

[19] L. Morris, *Tamely ramified intertwining algebras,* Invent. Math. **114**, 1-54 (1993).

[20] L. Morris, *Level zero G-types,* Compositio Math. **118**, 135-157 (1999).

[21] L. Morris, *Tamely ramified superecuspidal representations of classical groups. II. Representation theory,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4) **25**(3), 233-274 (1992).

[22] M. Tadic, *Notes on representations of non-archimedean SL(n),* Pacific J. Math., Vol. **152**, 375-396 (1992).

[23] J. Tits, *Reductive groups over local fields,* In: A. Borel, W. Casselman (eds.) Automorphic forms, representations and L-functions, (Proc. Symp. Pure Math., vol. 33, part 1, pp.29-69) Providence, RI: A.M.S. 1979.

[24] S. Stevens, Intertwining and supercuspidal types for p-adic classical groups, *Proc. London Math. Soc. (3) 83* (2001) 120-140.